Formelsammlung zu „Investition und Finanzierung“und „Wertpapieranalyse“

Jan Henning

16. Juni 2003

Vorwort

Diese Mitschrift soll beim Lernen helfen, sie basiert jedoch auf meinen persönlichen Aufzeichnungen aus der Vorlesung *(und auf dem Skript)* und ist sicherlich weder fehlerfrei noch von Professor Reichling authorisiert. Wer inhaltliche Fehler findet, möge sie mir mitteilen. Gleiches gilt, falls ich irgendein Copyright verletzen sollte.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Diskrete und stetige Rendite

Je nach Anwendung wird zwischen diskret und kontinuierlich berechneter (stetige) Rendite unterschieden:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_0(1+r_d) \qquad P_1 = P_0 \cdot e^{r_s} \\
1+r_d &= e^{r_s} \Leftrightarrow r_d = e^{r_s-1} \\
r_d &= \frac{P_1 - P_0}{P_0} \\
r_s &= \ln \frac{P_1}{P_0} = \ln P_1 - \ln P_0 \\
\bar{R}_d^o &= \sqrt[T]{\frac{P_T}{P_0}} - 1 \qquad \textit{(ökonomische Rendite)}
\end{aligned}$$

1.2 Kapitalwert und Annuität

Kapitalwert

$$KW = \sum_{t=0}^{T} CF_t \cdot DF_t \quad = \quad \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

Kapitalwertfunktion

$$KW(r) = \sum_{t=0}^{T} CF_t \cdot DF_t(r) \quad = \quad \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

Annuitätenmethode

Mit den Bezeichnungen AN ≡Annuität und $q^{-t} \equiv DF_t = (1+r)^{-t}$ gilt:

$$\begin{aligned} KW &= \sum_{t=1}^{t} AN \cdot q^{-t}. \\ \Longrightarrow \frac{KW}{AN} &= q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-T} \\ \Longrightarrow q \cdot \frac{KW}{AN} &= 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(T-1)}. \end{aligned}$$

Die Subtraktion der letzten beiden Gleichungen ergibt:

$$q \cdot \frac{KW}{AN} - \frac{KW}{AN} = 1 - q^{-T}.$$

Löst man diese Gleichung nach dem Kapitalwert KW auf, so erhält man folgende Darstellung:

$$KW = AN \cdot \frac{1 - q^{-T}}{q - 1} = AN \cdot \frac{q^T - 1}{q^T \cdot r}.$$

Dabei wird der Faktor

$$RBF(r, T) \equiv \frac{q^T - 1}{q^T \cdot r}$$

als **Rentenbarwertfaktor** bezeichnet. Der dazu reziproke Faktor

$$AF(r, T) \equiv \frac{q^T \cdot r}{q^T - 1}$$

wird als **Annuitätenfaktor** bezeichnet. Mit seiner Hilfe läßt sich in bequemer Weise die Annuität aus dem Kapitalwert bestimmen:

$$AN = KW \cdot \frac{q^T \cdot r}{q^T - 1} = KW \cdot AF(r, T).$$

1.3 Methode des Internen Zinsfußes

Der **Interne Zinsfuß** (IZF) einer Investition ist derjenige Zinsfuß r^*, bei dessen Verwendung als Kapitalisierungszinsfuß der Kapitalwert dieser Investition Null ist:

$$KW(r^*) = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r^*)^t} = 0.$$

Die Bestimmung von r^* ist problematisch, da die Nullstelle des Polynoms KW(r) *(es kann bis zu T reelle oder komplexe Nullstellen aufweisen)* im allgemeinen nur iterativ (z.B. mittels der **Regula Falsi** oder Varianten des **Newton-Verfahrens**) bestimmt werden kann. In zwei speziellen Fällen kann der Interne Zinsfuß jedoch recht einfach bestimmt werden:

Ewige Rente: Wird dieser Rentenanspruch zum Preis von A_0 erworben, dann muß

$$KW(r^*) = \frac{AN}{r^*} - A_0 = 0$$

gelten. Hieraus folgt:

$$r^* = \frac{AN}{A_0}.$$

Zu pari emittierte Kuponanleihe: Bezeichnet man mit N den Nennwert, mit K den Kupon und mit T die Laufzeit der Anleihe, so muss

$$KW(r^*) = -N + \frac{K}{AF(r^*)} + \frac{N}{(1+r^*)^T} = 0$$

gelten. Daraus ergibt sich folgender Interner Zinsfuß:

$$r^* = \frac{K}{N}.$$

Kapitel 2

Anleihen

2.1 Termin- und Kassazinssätze

Bei gegebener Kassazinsstruktur sind implizit auch Zinssätze für in der Zukunft beginnende Anlagezeiträume festgelegt. Hier spricht man daher von **Terminzinssätzen**. Entsprechend handelt es sich um Preise für die Kapitalüberlassung zu einem zukünftigen Zeitpunkt. Notation:

$r_t(T) \equiv$ Kassazinssatz p.a. (spot rate) einer insolvenzrisikofreien Finanzanlage mit Restlaufzeit T zum Zeitpunkt t; dieser entspricht der Verfallrendite einer Nullkuponanleihe mit Restlaufzeit T

$f_t(T) \equiv$ zum Zeitpunkt t bekannter Terminzinssatz p.a. (forward rate) für eine einperiodige, im Zeitpunkt T beginnende, insolvenzrisikofreie Finanzanlage

zur Vereinfachung:
$r(T) \equiv r_0(T)$ und $f(T) \equiv f_0(T)$

$$f(t-1) = \frac{(1+r(t))^t}{(1+r(t-1))^{t-1}} - 1, \qquad t = 1, 2, 3....$$

2.2 Anleihepreise

Bewertungsformeln bei flacher Zinsstruktur

$$\begin{aligned}
\text{Allgemeiner Fall: } KW &= \sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^T} \\
\text{Nullkuponanleihe: } KW &= \frac{N}{(1+r)^T} \\
\text{Ewige Rente: } KW &= \frac{K}{r} \\
\text{Rente: } KW &= K \cdot \frac{(1+r)^T - 1}{(1+r)^T \cdot r}
\end{aligned}$$

Bewertungsformeln bei nichtflacher Zinsstruktur

$$\begin{aligned}
\text{Allgemeiner Fall: } KW &= \sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r(t))^t} + \frac{N}{(1+r(T))^T} \\
\text{Nullkuponanleihe: } KW &= \frac{N}{(1+r(T))^T}
\end{aligned}$$

2.3 Duration

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot KW(Z_t)}{KW} \\
\Delta KW &\simeq -KW \cdot \frac{1}{1+r} \cdot D \cdot \Delta r \\
D_{mod} &= \frac{1}{1+r} \cdot D \\
\Delta KW &\simeq -KW \cdot D_{mod} \cdot \Delta r \Rightarrow \frac{\Delta KW}{KW} \simeq -D_{mod} \cdot \Delta r
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Aktien

3.1 Portfolioselektion

In der Portfolioselektion wird die diskrete Berechnung von Renditen vorausgesetzt!

3.1.1 Rendite und Risiko einzelner Wertpapiere

Erwartungswert

$$E(R_A) \equiv \mu_A \equiv \sum_{j=1}^{n} p(r_{A,j}) \cdot r_{A,j}.$$

Für den Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned} E(a) &= a; \\ E(a \cdot R_A) &= a \cdot E(R_A); \\ E(a + b \cdot R_A) &= a + b \cdot E(R_A). \end{aligned}$$

Varianz

$$\begin{aligned} Var(R_A) \equiv \sigma_A^2 &\equiv E((R_A - \mu_A)^2) \\ &= E(R_A^2 - 2 \cdot R_A \cdot \mu_A + \mu_A^2) \\ &= E(R_A^2 - \mu_A^2). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$Var(a \cdot R_A) = a^2 \cdot Var(R_A).$$

Standardabweichung

$$Std(R_A) \equiv \sigma_A = \sqrt{Var(R_A)}.$$

Es gilt:

$$Std(a \cdot R_A) = |a| \cdot Std(R_A).$$

Kovarianz

$$\begin{aligned} Cov(R_A, R_B) \equiv \sigma_{A,B} &\equiv E((R_A - \mu_a) \cdot (R_B - \mu_B)) \\ &= E(R_A \cdot R_B) - \mu_A \cdot \mu_B. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$Cov(a \cdot R_A, b \cdot R_B) = a \cdot b \cdot Cov(R_A, R_B).$$

Korrelationskoeffizient

$$Corr(R_A, R_B) \equiv \rho_{A,B} \equiv \frac{Cov(R_A, R_B)}{Std(R_A) \cdot Std(R_B)}$$

Für den Korrelationskoeffizienten gilt stets:

$$-1 \leq \rho_{A,B} \geq 1.$$

3.1.2 Rendite und Risiko von Wertpapiermischungen (Portfolios)

Portfoliorendite

Betrachtet wird ein aus den Wertpapieren A und B bestehendes Portfolio mit den wertmäßigen Anteilen x_A bzw. x_B mit $x_A + x_B = 1$. Falls x_A und x_B nur nichtnegative Werte annehmen dürfen, dann entspricht dies einem **Leerverkaufsverbot**.

Für den Erwartungswert der Portfoliorendite R_P gilt:

$$\begin{aligned} E(R_P) &= E(x_A \cdot R_A + x_B \cdot R_B) \\ &= xA \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B \\ &= x_A \cdot \mu_A + (1 - x_A) \cdot \mu_B. \end{aligned}$$

Für die Varianz der Portfoliorendite gilt:

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= E(((x_A \cdot R_A + x_B \cdot R_B) - E(x_A \cdot R_A + x_B \cdot R_B))^2) \\ &= x_A^2 \cdot E((R_A - \mu_A)^2) + x_B^2 \cdot E((R_B - \mu_B)^2) \\ &\quad +2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \underbrace{E((R_A - \mu_A) \cdot (R_B - \mu_B))}_{Cov(R_A,R_B)} \\ &= x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot Cov(R_A, R_B). \\ &= x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B} \end{aligned}$$

Minimum-Varianz-Portfolio (MVP)

$$x_A^{MVP} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \cdot \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B}}$$

Ein Minimum-Varianz-Portfolio verletzt dann nicht das Leerverkaufsverbot (d.h. es gilt $x_a^{MVP}, x_B^{MVP} \geq 0$), falls wegen (3.1)

$$\rho_{A,B} \leq \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A \cdot \sigma_B} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \qquad \text{bzw.} \qquad \rho_{A,B} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A \cdot \sigma_B} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B},$$

also folgende Bedingung für den Korrelationskoeffizienten gilt:

$$\rho_{A,B} \leq min\left\{\frac{\sigma_A}{\sigma_B}, \frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right\}.$$

Marktmodell

$$\begin{aligned} R_A &= E(R_A) + \beta_A(R_M - E(R_M)) + \epsilon_A \\ \text{mit } \beta_A &= \frac{Cov(R_A, R_M)}{Var(R_M)} \end{aligned}$$

Systematisches und unsystematisches Risiko

Gesamtrisiko	=	**Systematisches Risiko** (nicht diversifizierbar)	+	**Unsystematisches Risiko** (diversifizierbar)
$Var(R_A)$	=	$\beta_A^2 \cdot Var(R_M)$	+	$Var(\epsilon_A)$

mit:

$$\beta_A = \frac{Cov(R_M, R_A)}{\sigma_M^2}.$$

3.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Die Wertpapierkennlinie

$$E(R_i) = r_f + (E(R_M) - r_f)\beta_i \qquad \text{mit } \beta \equiv \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Die Kapitalmarktlinie

$$E(R_P) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$$

3.3 Performance-Messung

Jensens Alpha

$$\begin{aligned} \alpha_i &= E(R_i) - r_f - \beta_i \cdot (E(R_M) - r_f) \\ \text{mit } r_{it} &= \alpha_i + \beta_i \cdot r_{Mt} + \epsilon_{it} \\ \text{und } E(R_i) - r_f &= \alpha_i + \beta_i \cdot (E(R_M) - r_f) \end{aligned}$$

Treynor-Index

$$\frac{E(R_i) - r_f}{\beta_i} \leq ? \geq E(R_M) - r_f$$

Sharpe-Index

$$\frac{E(R_i) - r_f}{\sigma_i} \leq ? \geq \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}$$

Kapitel 4

Optionen

Zur Darstellung der Wertgrenzen wird die folgende Notation verwendet:

$S(S_t)$: aktueller Preis (Preis im Zeitpunkt t) des Basisinstruments;

K: Basispreis bzw. Ausübungspreis; er soll sinnvollerweise nichtnegativ sein: $K \geq 0$;

T: Restlaufzeit der Option;

$C(C^e)$: aktueller Preis eines Calls mit Basispreis K und Fälligkeit T vom amerikanischen (europäischen) Typ auf den Basiswert;

$P(P^e)$: aktueller Preis eines Puts mit Basispreis K und Fälligkeit T vom amerikanischen (europäischen) Typ auf den Basiswert;

$B_t(T)$: Preis einer Nullkuponanleihe (NKA) mit Fälligkeit T_z im Zeitpunkt t; unter der Annahme einer im Zeitablauf konstanten, flachen Zinsstrukturkurve mit kontinuierlichem Zinssatz $r \geq 0$ besitzt dieser Preis auch die Darstellung $B_t(T) = e^{-r(T-t)}$; im Fälligkeitszeitpunkt $t = T$ soll dieser Preis dem Nennwert von 1 EUR entsprechen: $B_T(T) = 1$; für $t < T$ soll $B_t(T) \leq 1$ gelten

Triviale Wertgrenzen

$$\begin{aligned}
C^e \leq C &\leq S \\
P^e \leq P &\leq K \\
C_t, C_t^e &\geq 0 \\
P_t, P_t^e &\geq 0 \\
C_t &= \max\{C_T^e, S_T - K\} \\
P_t &= \max\{P_T^e, K - S_T\} \\
C_t(T_1) &> C_t(T_2) \quad \text{und} \quad P_t(T_1) > P_t(T_2) \quad \text{mit} \quad T_1 > T_2 \\
C_t(K_1) &< C_t(K_2) \quad \text{und} \quad P_t(K_1) > P_t(K_2) \quad \text{mit} \quad K_1 > K_2
\end{aligned}$$

am Verfalltag:

$$\begin{aligned}
C_T &= C_T^e = \max\{0, S_T - K\} \\
P_T &= P_T^e = \max\{0, K - S_T\}
\end{aligned}$$

Europäische Wertuntergrenze

$$\begin{aligned} C^e &\geq \max\{0, S - KB(T)\} \\ P^e &\geq \max\{KB(T) - S, 0\} \end{aligned}$$

Vorzeitige Ausübung

$$S - K < S - KB(T) \leq C^e \leq C$$

Put-Call-Parität

$$\begin{aligned} P^e = C^e - S + KB(T) \\ P \geq C - S + KB(T) \\ C - S + KB(T) \leq P \leq C - S + K \end{aligned}$$

Kapitel 5

Finanzierung

5.1 Beteiligungsfinanzierung

Der rechnerische Wert des Bezugsrechts bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung

$$\begin{aligned} B &= \text{Bezugsrecht} \\ K_a &= \text{Kurs der alten Aktien} = \text{Börsenkurs} \\ K_n &= \text{Kurs der neuen Aktien} = \text{Bezugskurs} \\ \overline{K} &= \text{Mischkurs} \\ a &= \text{Zahl der alten Aktien} \\ n &= \text{Zahl der neuen Aktien} \\ a:n &= \text{Bezugsverhältnis} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= K_a - \overline{K} \\ B &= K_a - \frac{a \cdots K_a + n \cdots K_n}{a+n} \end{aligned}$$

Nach Umformung dieser Ausgangsgleichung erhält man:

$$B = \frac{K_a + K_n}{\frac{a}{n} + 1}$$

5.2 Leverage-Effekt

Eigenkapitalrendite

$$r_E \equiv \frac{r_G \cdot GK - r_F \cdot FK}{EK}$$

Eigenkapitalrendite als Funktion des Verschuldungsgrades FK/EK

$$r_E = r_G + (r_G - r_F) \cdot \frac{FK}{EK}$$

Die erwartete Eigenkapitalrendite und die Varianz der Eigenkapitalrendite in Abhängigkeit von dem Verschuldungsgrad

$$\begin{aligned} E(r_E) &= E(r_G) + (E(r_G) - r_F)\frac{FK}{EK} \\ Var(r_E) &= Var(r_G)\left(1 + \frac{FK}{EK}\right)^2 \end{aligned}$$

5.3 Bilanzkennzahlen

Vertikale Kapitalstrukturregeln

$$\begin{aligned} \text{Eigenkapitalquote} &= \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{Gesamtkapital}} \\ \text{Fremdkapitalquote} &= \frac{\text{Fremdkapital}}{\text{Gesamtkapital}} \\ \text{Eigenkapitalkoeffizient} &= \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{Fremdkapital}} \\ \text{Verschuldungsgrad} &= \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{Gesamtkapital}} \end{aligned}$$

Horizontale Kapital- und Vermögensstrukturregeln

$$\begin{aligned} \text{Anlagendeckung A} &= \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{Anlagevermögen}} \\ \text{Anlagendeckung B} &= \frac{\text{Eigenkapital + langfr. Fremdkapital}}{\text{Anlagevermögen}} \\ \text{Anlagendeckung C} &= \frac{\text{Eigenkapital + langfr. Fremdkapital}}{\text{Anlagevermögen + langfr. gebundenes Umlaufvermögen}} \\ \text{Working Capital} &= \text{(kurzfristiges) Umlaufvermögen - (kurzfristiges) Fremdkapital} \end{aligned}$$

Liquiditätskennzahlen

$$\begin{aligned} \text{Liquidität 1. Grades} &= \frac{\text{Zahlungsmittel}}{\text{kurzfristige Verbindlichkeiten}} \\ \text{Liquidität 2. Grades} &= \frac{\text{Zahlungsmittel + kurzfristige Forderungen}}{\text{kurzfristige Verbindlichkeiten}} \\ \text{Liquidität 3. Grades} &= \frac{\text{Umlaufvermögen}}{\text{kurzfristige Verbindlichkeiten}} \end{aligned}$$

Kennzahlen zur Finanzlage und Rentabilität

$$\begin{aligned}
\text{Eigenkapitalrentabilität} &= \frac{\text{Jahresüberschuß/-fehlbetrag}}{\text{Eigenkapital}} \\
\text{Gesamtkapitalrentabilität} &= \frac{\text{Jahresüberschuß/-fehlbetrag + Fremdkapitalzinsen}}{\text{Gesamtkapital}} \\
\text{Umsatzrentabilität} &= \frac{\text{Jahresüberschuß (vor Steuern)}}{\text{Umsatz}} \\
\text{Return on Investment} &= \text{Umsatzrentabilität} \cdot \text{Kapitalumschlag} \\
&= \frac{\text{Gewinn}}{\text{eingesetztes Kapital}}
\end{aligned}$$

Cash-flow orientierte Kennzahlen

Am häufisten wird die vereinfachte indirekte Methode verwendet!

Direkte Methode:		
Cash-flow	=	einzahlungswirksamer Ertrag - auszahlungswirksamer Aufwand
Indirekte Methode:		
Cash-flow	=	Jahresüberschuß
	+	auszahlungslose Aufwendungen
	-	einzahlungslose Erträge
Vereinfachte Indirekte Methode:		
Cash-flow	=	Jahresüberschuß
	+	Abschreibungen
	-	Rückstellungen

$$\begin{aligned}
\text{Cash-flow je Aktie} &= \frac{\text{Cash-flow} \cdot \text{Aktiennennbetrag}}{\text{Gezeichnetes Kapital}} \\
\text{Cash-flow-RoI} &= \frac{\text{Cash-flow}}{\text{Gesamtkapital}} \\
\text{Dynamischer Verschuldungsgrad} &= \frac{\text{Effektivverschuldung}}{\text{Cash-flow}}
\end{aligned}$$